

Recreació del descobriment newtonià de la llei de gravitació

JOSEP CASADELLÀ REIG

1 Introducció

La finalitat d'aquest treball és proporcionar als professors de física i de matemàtiques del batxillerat la possibilitat de recórrer a la història del descobriment de la *gravitació universal* en la seva pràctica docent. Els materials que es presenten són reelaboracions personals d'allò fet realment pels diversos «gegants» que conduïren a teories coherents i compatibles amb les observacions i els experiments, teories que expliquen la dinàmica del sistema solar amb lleis de la *mecànica*.

D'alguna manera, ens comparem amb un músic que reinterpreta peces antigues, joies del passat, amb instruments a l'abast actualment, amb la mira posada a la funció pedagògica. La representació de descobriments amb un llenguatge més actual agrada poc als historiadors en estat pur. La justificació prové de la finalitat pedagògica. No volem fer història pura sinó contribuir a la formació dels nous científics, fent-los partícips de les idees fecundes soterrades parcialment pel pas del temps.

La manera com es presenten la cinemàtica i la dinàmica guarda connotacions històriques implícites. La mecànica newtoniana naixé de les mans d'Isaac Newton en un format difícil d'entendre per a lectors poc instruits en geometria sintètica i menys instruits encara en les subtileses del càlcul de límits de raons entre segments la longitud dels quals s'anuïa en el límit. Els matemàtics europeus reformularen aquesta mecànica ampliant-ne els aspectes formals, amb l'ajut de l'evolució del càlcul infinitesimal. Els aspectes merament matemàtics es separaren de les lleis físiques per millorar la presentació racional del conjunt. El creixement històric retingué alguns problemes rellevants de la gènesi, com el moviment de caiguda dels «greus», el pla inclinat, el moviment dels cossos projectats (moviment forçat versus moviment natural); millorà el llenguatge, i feu més extensa i lògica l'obra newtoniana. Les simplificacions produïdes en nom de la didàctica han mantingut l'estructura lògica de la mecànica racional i alguns problemes que foren rellevants en la seva gènesi, però allunyats del context en què es plantejaren.

No hi ha curs de física, gairebé, que no comenci tractant del moviment en un llenguatge que podria considerar-se matemàtic absolutament, si no fos que el que

es mou es considera un objecte físic, i també les magnituds involucrades (longitud, posició, velocitat i acceleració) es consideren de naturalesa física, en la mentalitat actual poc donada a la síntesi interdisciplinar. Les *lleis del moviment* es tracten quasi a part del moviment, en una secció separada, la dinàmica. Rarament s'apliquen als problemes del moviment dels planetes, que foren la pedra de toc del seu naixement.

En el cas que ens ocupa, la construcció d'una mecànica universal (celeste i terrestre), *el moviment de la Terra* constituïa el problema clau que calia resoldre i oferia el context de la discussió. Si els cossos tendien al repòs de manera natural, com molts estudiants es veuen impulsats a creure, i com sostenia Kepler, per exemple, és clar que en caure al terra abandonats a certa altura des del repòs, haurien de manifestar un desplaçament de la vertical si la Terra estigués en moviment. No s'observa tal cosa. Alguns creien que era prova de la quietud de la Terra. Galileu mostrà que la *inertiae* (nom llatí que significa *peresa* emprat per Kepler per referir-se a la tendència al repòs) era, més aviat, la tendència al manteniment del moviment uniforme horitzontalment. Així un cos en caure mantenia el moviment de la Terra horitzontalment, i en conseqüència no s'hauria d'apartar de la vertical independentment de si la Terra estava o no en moviment.

En resum, reproduir el context en el qual va sorgir la mecànica clàssica, ofereix un marc especialment ric per al seu aprenentatge. Molts temes clàssics recuperen la seva rellevància en aquest context. Per contribuir en aquesta llarga tasca el present treball es centra en alguns dels mètodes matemàtics desenvolupats per Newton a fi i efecte de trobar les forces centrípetes de cossos que es movien en trajectòries conegudes. Com és conegut, aplicar aquests mètodes al cas del moviment planetari permet trobar la força amb què el Sol atreu els planetes. La manera concreta com es reproduïx aquest càlcul aquí reprèn una proposta de Newton plantejada però no desenvolupada en els *Principia*, que estableix la relació entre l'acceleració i la curvatura de les trajectòries. Per acabar s'analitza breument el paper de les masses en l'atracció gravitatòria, on és imprescindible fer ús de la tan famosa com mal compresa tercera llei del moviment.

2 Newton: mètodes i resultats

L'obra més celebrada de Newton és el tractat anomenat correntment *Principia*, manera ràpida de referir-se als *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Està estructurada en tres parts, dites llibres a l'època. Abans de la primera part (llibre I), a la manera d'una introducció, Newton fa unes definicions (forces, massa, quantitat de moviment, acceleració i impuls mecànic) i anuncia les famoses *lleis del moviment* o axiomes físics. Suposa la matèria en un cert estat de moviment en un espai buit, i es permet de fer abstracció de l'entorn terrestre immediat, que és dominat per la presència contínua i ineludible del pes, per recrear-se en unes lleis vàlides en un espai hipotètic on no necessàriament hi ha de concórrer el pes o qualsevol altra mena de força. No era obvi a l'època. Descartes en els seus *Principia Philosophiæ* negava la possibilitat de l'espai buit.

També en aquesta primera part Newton estableix el que ell anomena *mètode de les primeres i últimes raons de quantitats*, i que avui en dia considerariem com aquella mena de límits de quocients en què s'anul·len numerador i denominador simultàniament. Com s'endevina amb facilitat, el càlcul de derivades és un cas particular i notable d'aquest mètode. Després d'onze *lemes* de límits, aplica aquests a esbrinar les relacions existents entre forces i trajectòries d'un sol cos (en el buit).

La resta de la primera part (llibre I) l'aplica a calcular forces donades les trajectòries i el temps amb què són descrites. També es poden determinar les trajectòries conegudes les forces. Hi ha casos notables: el moviment dels planetes, les forces atractives de cossos extensos (esfèrics i no esfèrics), el moviment d' n cossos, la relació entre velocitat i posició d'un cos en un camp central, etc.

En la segona part (llibre II), Newton tracta del moviment dels cossos en medis, als quals qualifica de resistius. En el fons, honestament Newton reconeix no poder afirmar si l'espai interplanetari és realment buit o hi ha una essència (un èter) que no ofereix resistència al moviment. En la tercera part (llibre III) aplica els resultats obtinguts a la filosofia natural de manera més evident i intencionada que en les altres parts.

No pretenem pas explicar fil per randa el contingut dels *Principia*, puix que cadascú pot llegir directament aquesta obra. Tractarem de limitar-nos a destacar uns mínims selectes (segons criteri propi), que poden donar idees d'utilitat diversa, per exemple en l'ensenyament de la física matemàtica —i possiblement, servir de guia per entendre els mètodes de Newton en els *Principia*.

2.1 El moviment dels projectils

Galileu va donar molta importància al moviment dels projectils, no pas per les aplicacions bèl·liques justament, sinó per la seva rellevància, ja que estava relacionat amb el debat obert per Copèrnic en el Renaixement sobre el moviment de la Terra. La versió reduïda d'aquest món en moviment Galileu la va representar en l'exemple famós del vaixell. Un navegant que deixés caure un greu des del punt més alt de la bodega, prop del pal, no podria observar si el vaixell estava o no en moviment, la qual cosa significa que si el vaixell es movia respecte el port, algú que aconseguís veure la caiguda del greu des del port, hauria de descriure la trajectòria d'aquest cos com una paràbola. L'explicació la donava Galileu superposant un moviment inercial horitzontal a un moviment de caiguda lliure vertical, uniformement accelerat.

El moviment dels cossos projectats es converteix en paradigmàtic a les mans de Newton, que l'interpreta com un exemple de moviment d'un cos al qual se li aplica una força en una direcció diferent de la que porta la velocitat. En un dels corollaris de les lleis del moviment (corollari VI) reinterpreta la trajectòria parabòlica d'un cos projectat sobre la superfície terrestre tal com es representa a la figura 1. En un interval de temps el cos recorreria un arc AED . Si no fos per la gravetat hauria descrit el segment AB en la direcció que tenia la velocitat a A . Mentre que pel que fa a la sola acció de la gravetat, el camí que recorreria el cos seria AC . Ara bé, el segment AB al llarg de la tangent és proporcional a la velocitat i al temps, mentre que el segment AC o BD , que representa el que s'ha apartat el cos de la tangent per l'acció del pes, és proporcional a l'acceleració de la gravetat i al quadrat del temps.

Per calcular les forces Newton prendrà l'exemple dels cossos projectats. En un temps infinitesimal, qualsevol arc de trajectòria pot considerar-se parabòlic. Poste-

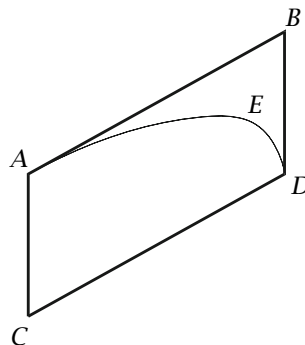


FIGURA 1: Moviment d'un cos projectat.

riorment Newton aproximarà infinitesimalment les trajectòries amb circumferències de radi anomenat *radi de curvatura*. Però abans s'assegura que el moviment circular és tractable (infinitesimalment) com en un cas de moviment parabòlic.

2.2 El càlcul de forces

Suposem que coneixem la trajectòria d'un objecte al qual se li aplica una força constant. Seria una paràbola, com en el cas dels cossos projectats sobre la superfície terrestre. Suposem que coneixem també la velocitat en un punt A , diem-li V_A . Després d'un interval de temps t el cos haurà descrit un arc de trajectòria AED , tal com es mostra a la figura 1, trobant-se a un punt D . Si prenem com a eixos de coordenades obliqües la direcció de la velocitat V_A i la de la força aplicada a A , el punt D tindrà coordenades (x, y) , considerant l'eix X al llarg de la força, AC a la figura, i l' Y al llarg de la velocitat, AB en la figura. D'acord amb aquestes consideracions es tindrà que

$$y = V_A t \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{2} g t^2, \quad (2)$$

ja que la coordenada y correspon al desplaçament degut a la velocitat del cos a A , mentre que la x correspon a un desplaçament degut a un moviment uniformement accelerat, que s'inicia en el punt A . Observeu que en el punt A la velocitat en la direcció de la força és nul·la.

S'ha adoptat el nom de g per representar l'acceleració, similarment al cas de la caiguda lliure dels greus, independentment del caràcter de la força en qüestió. Seguint a Newton considerarem que l'acceleració és la força per unitat de massa. De manera que en general tractarem d'obtenir l'acceleració, que és la força que s'aplicaria a una massa unitat, més que no pas la força aplicada a una massa qualsevol.

Si la força fos constant, l'acceleració també ho fóra. En aquest cas podríem eliminar els temps en les equacions anteriors, per obtenir

$$x = \frac{1}{2} \frac{g}{V_A} y^2. \quad (3)$$

Els paràmetres g i V_A són constants. L'equació anterior correspon a la de la trajectòria parabòlica prenent com a eixos de coordenades els oblics X i Y anteriorment descrits.

Si coneixem la trajectòria, és a dir, l'equació de la paràbola, la direcció de la força i la velocitat en un punt A , podem trobar el valor de l'acceleració g amb el càlcul següent:

$$g = \frac{V_A^2}{\frac{1}{2} \frac{y^2}{x}}. \quad (4)$$

Què passa si la força no és constant? Concretament, suposem que depengui de la localització a l'espai variant de manera contínua. Newton proposa mantenir els càlculs anteriors considerant x i y com infinitament petits. En deia *quantitats naixents o evanescents*. Actualment representem els quocients d'infinitèsims com a límits. Així, l'expressió anterior es transformarà en la següent:

$$g = \frac{V_A^2}{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2}{x}}. \quad (5)$$

Aquesta equació dóna un procediment general de càlcul d'acceleracions (forces), amb el benentès que coneixem les trajectòries, la direcció de la força i la llei de les velocitats en cada punt de la trajectòria. De fet, aquest era el cas del moviment planetari en el l'època de Newton. Els astrònoms havien proporcionat les trajectòries dels planetes, i la llei kepleriana de les àrees equivalia a donar les velocitats dels planetes en cada punt de la trajectòria.

Newton va trobar el mètode de càlcul de la força responsable del moviment dels planetes formulada anteriorment, com veurem més endavant. Però a la pràctica va utilitzar un mètode més primitiu o directe de càlcul. Si observem l'equació (2) i les condicions en què s'ha obtingut, és clar que podem obtenir també l'acceleració resolent el límit

$$g = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x}{t^2}. \quad (6)$$

Recordeu que x correspon al desplaçament causat per la força. Actualment preferim calcular les acceleracions fent la derivada segona de x respecte del temps, la qual cosa equival a resoldre dos límits en lloc d'un.

Per entendre adequadament el que Newton va fer s'ha de dir que en l'anterior expressió ell utilitzava àrees en lloc de temps, ja que, centrant-se en el moviment dels planetes, les àrees descrites pel seu moviment, tancant els arcs curvilinis amb rectes a un dels focus, eren proporcionals als temps.

2.2.1 La llei de les àrees segons Newton. Newton coneixia la llei de les àrees anunciada per Kepler mig segle abans, i la va reformular imaginant que la trajectòria dels planetes era el cas límit d'un moviment poligonal, on cada inflexió provenia d'un impuls mecànic similar a un xoc. Pot ser que aquesta formulació fos una adaptació d'un antic intent de representar el moviment circular uniforme com el cas límit d'una bola que rebotava per l'interior d'un cilindre.

L'eix central de l'argumentació newtoniana es pot reproduir amb l'ajut de la figura 2. Suposem un cos amb trajectòria rectilínia ABC . En absència de forces, prenent intervals de temps t iguals el cos descriuria segments també iguals. Suposem aquests segments AB i Bc . Considerem un punt S exterior a la recta. Els triangles SAB i SBC tindran la mateixa àrea, ja que comparteixen el vèrtex S , i prenent els segments AB i Bc com a bases, les altures dels dos triangles seran iguals, ja que aquestes corresponen a la distància del punt S a la recta que conté les bases.

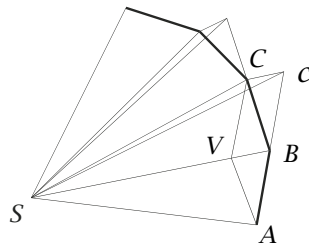


FIGURA 2: Llei de les àrees segons Newton.

Suposem ara que en el punt B el cos rep un impuls mecànic en la direcció BS . El cos adquiriria una velocitat, de manera que, si no fos per la velocitat que ja tenia, es desplaçaria una longitud BV en el temps considerat. La superposició d'aquestes velocitats, l'adquirida a B i la que ja tenia (inèrcia), produeix la superposició dels desplaçaments BV i Bc , movent-se el cos el segment BC . Ara, el nou triangle generat SBC té la mateixa àrea que els anteriors. Per mostrar-ho només s'ha de veure que té la mateixa àrea que el SBC . Això posa de manifest, considerant com a base dels dos triangles, el segment comú SB . Les seves altures seran iguals, atès que aquestes

seran les distàncies dels vèrtexs C i c a la recta que conté la base SB . Observeu que el segment Cc és igual i paral·lel al segment BV . Com que el segment que uneix aquests dos vèrtexs és paral·lel a la base, les altures seran efectivament iguals.

El raonament anterior es repetiria en cada una de les inflexions. La condició és que els impulsos es donin sempre en direcció al mateix punt S , no importa amb quin intensitat. Fins i tot podrien ésser repulsions.

Una conseqüència important d'aquesta llei és el fet que els planetes estan atrets per una força dirigida al Sol, d'intensitat a calcular però centrada en el Sol.

Reprent la discussió del final de la secció anterior sobre els mètodes newtonians de càlcul de forces, si diem $\dot{\Omega}$ a la velocitat amb què creixen les àrees a causa del moviment d'un cos en un camp central, podem substituir t per $\Omega/\dot{\Omega}$. Si diem x a la longitud del segment que separa la trajectòria de la seva tangent a un punt, en la direcció de la força, en aquest cas $x = BV$ o $x = cC$, hom pot calcular l'acceleració causada per la força fent

$$g = 2\dot{\Omega}^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\Omega^2}, \quad (7)$$

expressió que representa el mètode de càlcul de les forces emprat efectivament per Newton. S'ha de reconèixer que hi ha quelcom d'elegant en la formulació anterior. Tota la part dinàmica és representada per una constant, la velocitat areolar. La resta és un límit de caire purament geomètric.

2.2.2 El moviment circular uniforme. De nou un moviment paradigmàtic. Si hom volgués simplificar les coses podria considerar el sistema planetari com si cada planeta descrivís un moviment circular uniforme i el Sol estigués al centre de totes les trajectòries circulars.

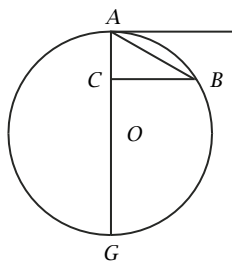


FIGURA 3: Moviment circular uniforme.

Suposem, d'acord amb la figura 3, un tal moviment. Un cos que en un instant determinat està al punt A passa a B després d'un interval de temps. Els arcs descrits són proporcionals al temps, i també les àrees dels triangles curvilinis considerats des del centre O . Dit d'altra manera, hi ha una força dirigida cap al centre de la trajectòria circular, d'acord amb la discussió de la secció precedent. L'acceleració que produeix es pot mesurar resolent l'expressió (5). En aquest cas la part del límit es concreta com

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2}{x} = \lim_{B \rightarrow A} \frac{BC^2}{AC}.$$

Com que el triangle ABG és rectangle, es podrà afirmar pel teorema de l'altura que

$$BC^2 = AC \cdot CG.$$

Per tant,

$$\frac{BC^2}{AC} = CG,$$

que en el límit, quan l'interval de temps s'anulli, a l'igual que BC i que AC , es farà igual al diàmetre de la circumferència. Per tant,

$$g = \frac{V^2}{R}, \quad (8)$$

essent R el radi de la circumferència. Com que la velocitat pot deduir-se de les dimensions de la circumferència i del període de revolució T , $V = \frac{2\pi r}{T}$ i tenim

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} R.$$

Tal com fa Newton en la proposició IV del corollari VI, apliquem el resultat anterior al model simplificat del sistema planetari. L'anomenada *tercera llei de Kepler* afirmaria, en aquest model, que $T^2 = \text{Cons} \cdot R^3$, suposant que les trajectòries dels planetes fossin circulars. S'obtidria una llei per l'acceleració de la gravetat solar

$$g = \frac{4\pi^2}{\text{Cons}^2} \cdot \frac{1}{R^2}, \quad (9)$$

essent la constant Cons característica del sistema planetari. La fórmula anterior revela que l'acceleració dels planetes vers el Sol és inversament proporcional al quadrat de la distància a aquest. En conseqüència, la força amb què el Sol atrau els planetes també. Una conclusió realment notable, que contribueix a creure en la realitat d'una llei d'atracció dels planetes cap al Sol. Queda per obtenir un resultat com aquest però partint d'un model més proper a la realitat, en el qual es suposen trajectòries el·líptiques i el Sol fix en un dels focus. Amb aquesta fita desenvoluparem la noció de curvatura, la seva connexió amb les forces i la curvatura de les el·lipses.

2.2.3 La curvatura de les trajectòries. La curvatura de les corbes, concepte inventat per Newton, s'utilitza també als *Principia*. Al lema XI, en aparença purament matemàtic, hi defineix el que actualment es coneix com la *circumferència osculatriu*. Donada una corba (tipus trajectòria) ABE , on A és una tangència a la mateixa (vegeu figura 4) amb punt de tangència A , hom pot construir una circumferència elegint un punt de la corba B , construint un segment AB , una perpendicular a aquest BG i una perpendicular a la tangent esmentada AG . El triangle rectangle ABG defineix la circumferència buscada, de diàmetre igual a la hipotenusa AG .

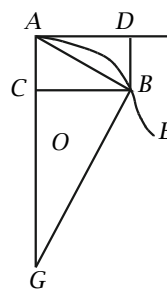


FIGURA 4: La curvatura d'una trajectòria.

Es defineix com a *circumferència osculatriu* la que s'obté —si realment se n'obté alguna— en el límit quan el punt B s'apropa infinitesimalment a A . La curvatura es defineix com l'invers del radi d'aquesta circumferència. Si diem a aquest radi R_c , aplicant el teorema de l'altura de la mateixa manera que en el moviment circular uniforme, podem escriure

$$2R_c = \lim_{B \rightarrow A} \frac{AD^2}{AC}.$$

La curvatura també es podria calcular d'una altra manera, utilitzant la secant AB en lloc del segment de tangent AD . En efecte, s'acompleix, com es pot demostrar per semblança de triangles, que

$$AB^2 = AC \cdot AG,$$

fet conegut com a teorema del catet. En conseqüència, es pot obtenir també el diàmetre de la circumferència osculatriu fent el límit

$$2R_c = \lim_{B \rightarrow A} \frac{AB^2}{AC}.$$

Incidentalment, el resultat anterior podria utilitzar-se per veure que el quocient entre la secant AB i la tangent AD té per límit la unitat.

2.2.4 Forces, curvatures i àrees. Finalment, podem fer ús de la curvatura per calcular forces, donades les trajectòries i velocitats amb què són recorregudes. Suposem una trajectòria PQR corbada per una força centrípeta dirigida cap al punt S , d'acord amb la figura 5. En el punt P hi tracem la tangent i la circumferència que esdevindrà l'osculatriu en el cas límit quan Q s'apropi infinitament a P . També s'hi ha dibuixat una perpendicular a la tangent aixecada des de S , delimitant el segment SY (vegeu figura 5).

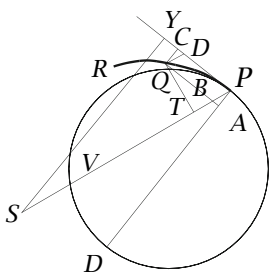


FIGURA 5: La curvatura causada per una força.

El segment QD és paral·lel a SP ; el QC , paral·lel al diàmetre de la circumferència PD i QT s'ha construït perpendicular a SP .

El moviment de P a Q es pot considerar compost per dos moviments, d'acord amb la generalització del moviment dels projectils. Un d'inercial, és a dir a velocitat constant, des de P fins a D , suposant D infinitament proper a Q . L'altre en la direcció de la força a P , de valor DQ o PB , que seria uniformement accelerat, considerant Q infinitament proper a P .

Per calcular l'acceleració centrípeta en el punt P de la trajectòria, s'hauria d'avaluar l'expressió (5), d'acord amb el que s'ha vist a la secció 2.2. En aquest cas l'expressió citada prendria la forma següent:

$$g = \frac{V_P^2}{\frac{1}{2} \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QB^2}{PB}}.$$

El límit del denominador dóna la corda Pv , essent aquesta el límit de PV quan Q s'apropi infinitament a P , tal com es demostra a continuació. És a dir, es tracta de provar la igualtat

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{QB^2}{PB} = Pv. \quad (10)$$

Sabem per la definició de curvatura que

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{QA^2}{PA} = 2R_c,$$

essent Rc el radi de curvatura. Els dos límits esmentats estan relacionats. Per fer evident aquesta interdependència s'ha d'observar que els triangles rectangles PAB i PVD són semblants. La igualtat

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PV}{PD}$$

ens permet transformar el teorema de l'altura $QA^2 = PA \cdot AD$ en una expressió equivalent on figuren els segments de la secant PV en el lloc dels homòlegs del diàmetre PD .

$$(QB + BA)^2 = PB \cdot PV \frac{AD}{PD}.$$

Com que ens interessa aïllar $\frac{QB^2}{PB}$, convé desenvolupar el quadrat de l'esquerra de la igualtat. Arreglant el desenvolupament s'obté

$$\frac{QB^2}{PB} = PV \cdot \frac{AD}{PD} - BA \cdot \frac{BA}{PB} - 2QB \cdot \frac{BA}{PB}.$$

En el límit, quan Q s'apropi infinitament a P , els termes que resten a la part dreta de la igualtat seran zero, ja que la part expressada en forma de quocient és constantment igual a $\sin(BPA) = \frac{BA}{BP}$, la qual ve multiplicada per un segment que s'anulla en el límit en cada un dels casos.

Queda per analitzar el valor límit de $PV \cdot \frac{AD}{PD}$. S'ha de suposar que la circumferència osculatriu no coincideix necessàriament amb la que passa pels punts P , Q i D , de manera que PV passaria a valer algun valor Pv , mentre que el quocient entre AD i PD passaria a valer la unitat. Queda doncs provada la igualtat (10). El segment Pv és la part del que va des del centre on es dirigeixen les forces fins a la posició del mòbil en un instant donat, delimitat per la circumferència osculatriu. És immediat que hom podria descompondre l'acceleració centrípeta en dos components, un de tangencial i l'altre en la direcció del radi de curvatura, de valor inversament proporcional a aquest, però ens quedarem amb el resultat general

$$g = \frac{V_P^2}{\frac{1}{2}Pv}. \quad (11)$$

Newton obté un resultat equivalent a aquest en el corollari IV de la proposició VI del teorema v dels *Principia*, però prefereix utilitzar altres mètodes per calcular forces, eliminant la referència a la velocitat del cos en un punt concret. Com s'ha dit anteriorment substitueix el temps per àrees, o més concretament per l'àrea del triangle curvilini SPQ generada en el moviment PQ . Aquesta valdrà en el límit quan $Q \rightarrow P$, $0,5SY \cdot PD$, considerant SY la base dels triangles SYP i SYD , per diferència d'àrees d'aquests triangles. La velocitat areolar $\dot{\Omega}$, —quocient entre l'àrea infinitesimal esmentada i el temps infinitesimal tardat en generar-la— serà igual a $0,5SY \cdot V_P$, ja que $V_P = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{PD}{t}$. Podem fer

$$V_P = \frac{2\dot{\Omega}}{SY}, \quad (12)$$

expressió que dona la velocitat d'un mòbil que compleixi amb la llei de les àrees en cada punt de la seva trajectòria. Amb aquesta expressió podem calcular l'acceleració

centrípeta fent la igualtat (corollari III de la mateixa proposició VI)

$$g = \frac{8\dot{\Omega}^2}{SY^2 \cdot PV}. \quad (13)$$

De tota manera, el mètode de càlcul més utilitzat per Newton prové de la igualtat (7), que concretada en el cas descrit a la figura adjunta, seria

$$g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{QD}{t^2},$$

substituint el quadrat del temps pel quadrat de l'àrea descrita en el mateix temps.

Ni que només sigui per reproduir de manera aproximada el procediment preferit de Newton, podem calcular l'àrea també fent

$$\Omega = \frac{1}{2}SP \cdot QT.$$

En aquest cas es pren com a base SP i com altura QT . Com que $t = \Omega/\dot{\Omega}$, podem fer que $t = \frac{1}{2} \frac{SP \cdot QT}{\dot{\Omega}}$. Arreglant els termes, la igualtat (7) queda

$$g = \frac{8\dot{\Omega}^2}{SP^2 \lim_{Q \rightarrow P} \frac{QT^2}{QD}}. \quad (14)$$

El predomini d'aquest mètode en els *Principia* és probable que sigui degut al fet que va ésser el primer que es va emprar en l'elaboració dels *Principia*, en particular en la solució del «problema VI», considerat clau pels historiadors de Newton. En aquest problema es tractava de trobar l'acceleració centrípeta d'un cos que descrivia una trajectòria el·líptica i que tenia una força dirigida vers un dels focus. Per reproduir la resolució newtoniana d'aquest problema ens farà falta recordar certs coneixements de geometria de les seccions còniques, que per brevetat limitem a les el·lipses.

3 Trajectòries el·líptiques

Tots els planetes descriuen trajectòries el·líptiques al voltant del Sol, a l'igual de cometes. Per recrear les condicions en què Newton calcula des d'aquest fet la llei de la força amb què el Sol atreu els astres del sistema solar, farem una breu repassada a les propietats geomètriques de les el·lipses.

3.1 Equació d'una el·lipse en coordenades cartesianes

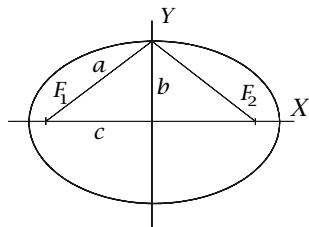
Podem definir una *el·lipse* com el resultat de deformar uniformement una circumferència en una direcció fixa. Aquest efecte es pot obtenir fent correspondre a cada punt P del pla un segon punt Q , lligats tots dos per la condició que les segones coordenades estiguin en una proporció constant λ . Si $P = (s, t)$ és un punt de la circumferència, la seva imatge de l'el·lipse serà $Q = (x, y)$, on $x = s$ i $y = \lambda t$.

D'acord amb aquesta relació podem obtenir l'equació de l'el·lipse a partir de la de la circumferència. Sabem que aquesta, quan el seu centre coincideix amb l'origen del sistema de coordenades, té la forma

$$s^2 + t^2 = a^2.$$

La relació que busquem lliga x, y, a, λ . En conseqüència, per obtenir l'equació de l'el·lipse apliquem el canvi de coordenades en l'equació de la circumferència.

$$x^2 + \frac{y^2}{\lambda^2} = a^2.$$



S'acostuma a presentar aquesta equació dividint la igualtat anterior per a^2 i fent la substitució $b = \lambda a$, passant a la coneguda forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (15)$$

FIGURA 6: Propietats focals de l'el·lipse.

En aparèixer les coordenades dels punts de l'el·lipse elevades al quadrat, en l'equació, donat un punt de la corba, es poden definir tres punts més a partir d'aquest que també compliran amb l'equació, i en conseqüència estaran també a la corba. Sigui aquest punt $P_0 = (x_0, y_0)$. Definim $P_1 = (-x_0, y_0)$, $P_2 = (x_0, -y_0)$ i $P_3 = (-x_0, -y_0)$. Tots ells seran de la corba perquè en elevar al quadrat els signes negatius desapareixeran. Per tant, els eixos de coordenades seran eixos de simetria de la corba (en el cas que ens ocupa, de l'el·lipse centrada a l'origen de coordenades).

3.2 Els focus de l'el·lipse i l'excentricitat

En l'anomenat eix major de l'el·lipse es defineixen dos punts, F_1, F_2 , equidistants del centre de la figura (que en aquest cas és també el centre de coordenades), als quals s'anomena focus de l'el·lipse. La seva distància al centre és c , es compleix $c^2 = a^2 - b^2$, i estan situats un a cada costat del centre. Per a qualsevol punt P de l'el·lipse es compleix la propietat següent, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

L'expressió $d(A, B)$ significa la distància entre els dos punts situats entre parèntesis. Sovint es parteix d'aquesta propietat per definir l'el·lipse.

És una mica tediós fer-ne la demostració, però s'obté sense massa dificultat manipulant l'equació de l'el·lipse, i eliminant les arrels quadrades que apareixen en les distàncies entre punts, ja que aquestes es calculen pel teorema de Pitàgores, on la distància apareix com la hipotenusa d'un triangle rectangle, amb els catets paral·lels als eixos de coordenades.

Els focus són molt útils per definir l'anomenada *excentricitat* de l'el·lipse, paràmetre que indica si la figura està poc o molt aixafada, en comparació a una circumferència de radi a . Es defineix, doncs, l'excentricitat com $e = \frac{c}{a}$. Quan $e = 0$, es dóna el cas de la circumferència, podent-se interpretar aquesta com un cas particular d'el·lipse. En l'altre cas extrem, quan $e = 1$, l'el·lipse coincideix amb un segment de longitud $2a$.

Observeu que $2c = d(F_1, F_2)$. Per tant, l'excentricitat és el quocient entre la distància que separa els focus i la que separa els vèrtexs.

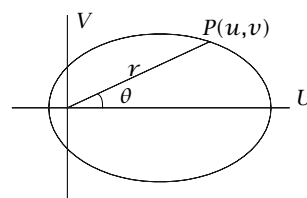


FIGURA 7: Origen de coordenades en un dels focus de l'el·lipse.

3.3 Equació de l'el·lipse en polars

Les coordenades polars d'un punt P , de coordenades cartesianes (u, v) , són el parell de valors (r, θ) , que representen respectivament la distància de P a l'origen de coordenades i l'angle que dóna la inclinació del segment que va de l'origen al punt P respecte l'eix de les abscisses. És immediat veure que $u = r \cos(\theta)$ i $v = r \sin(\theta)$.

Per obtenir l'equació de l'el·lipse en polars primer s'ha de definir l'origen del sistema de coordenades cartesianes, que es pren sempre a un dels focus. De l'equació de l'el·lipse en coordenades cartesianes en aquest nou sistema centrat en un focus, en derivariem l'equació en funció de r i de θ .

Atès que el resultat és prou conegut, en donarem directament la solució.

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}. \quad (16)$$

El paràmetre de l'el·lipse p admet una interpretació geomètrica senzilla, molt fàcil d'aclarir a través de l'equació en polars. Quan l'angle θ és de $\frac{\pi}{2}$ radianys, el denominador de l'equació (16) val la unitat, i veiem que, en aquestes circumstàncies, $p = r$. És a dir, p és la longitud del segment que s'aixeca perpendicularment a l'eix major, des del focus i delimitat per l'el·lipse.

3.4 Equació de l'el·lipse des d'una tangent

Apol·loni de Perge emprava relacions entre segments delimitats per seccions còniques i els seus *diàmetres conjugats* que avui identificariem com a equacions en coordenades obliqües. Nosaltres ens centrarem en el cas de les el·lipses. Seguint amb la idea inicial de deformar una circumferència per obtenir una el·lipse, per aconseguir l'equació desitjada buscarem d'entrada l'equivalent en la circumferència.

Dos diàmetres conjugats d'una circumferència serien, simplement, dos qualssevol que fossin perpendiculars entre si. Traçant una paral·lela al segon diàmetre de manera que passi pel punt on comença el primer, obtenim una tangent a la circumferència, que, tanmateix, serà perpendicular al diàmetre que toca, tal com es mostra a la figura 8.

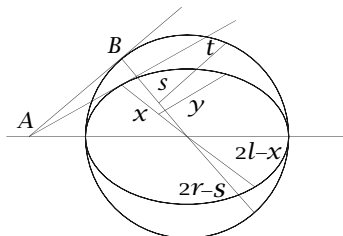


FIGURA 8: La circumferència es transforma en una el·lipse.

Prenem com a sistema de coordenades una recta tangent a la circumferència de radi r i la que conté el diàmetre perpendicular a la tangent esmentada. Direm (s, t) a la parella (*abscissa, ordenada*). Un punt de la circumferència de coordenades (s, t) satisfarà l'equació

$$t^2 = s(2r - s) \quad (17)$$

d'acord amb el teorema de l'altura.

Transformant el pla fent correspondre a cada punt un segon punt tal com s'ha fet anteriorment per derivar l'equació de l'el·lipse de la d'una circumferència, cada segment del pla es transformarà en un altre segment de dimensions proporcionals. En concret, observant la figura adjunta, al punt B li correspondria un punt C situat sota seu, no assenyalat a la figura. El radi de la circumferència r es transformarà en el «radi» de l'el·lipse l . Les antigues

de l'el·lipse de la d'una circumferència, cada segment del pla es transformarà en un altre segment de dimensions proporcionals. En concret, observant la figura adjunta, al punt B li correspondria un punt C situat sota seu, no assenyalat a la figura. El radi de la circumferència r es transformarà en el «radi» de l'el·lipse l . Les antigues

coordenades (s, t) es transformaran en les (x, y) , i pel teorema de Tales es complirà que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{t}{y} \quad (18)$$

i

$$\frac{r}{l} = \frac{s}{x}. \quad (19)$$

Així, $t = y \frac{AB}{AC}$ i $s = x \frac{r}{l}$, que substituint-les a l'equació (17), donen la nova equació

$$y^2 = \frac{AC^2 r^2}{AB^2 l^2} x(2l - x). \quad (20)$$

Els segments AC, AB, l estan donats pel diàmetre de l'el·lipse i per la tangent que el toca en l'extrem. La paral·lela a la tangent que passa pel centre de l'el·lipse és el diàmetre conjugat del primer. Suposem que la seva longitud sigui $2q$. Llavors, el punt extrem del diàmetre conjugat satisfarà

$$q^2 = \frac{AC^2 r^2}{AB^2 l^2} l(2l - l). \quad (21)$$

Dit d'una altra manera, $q^2 = 2 \frac{AC^2 r^2}{AB^2}$. L'equació (20) es simplifica per substitució, i dóna

$$y^2 = 2 \frac{q^2}{l} x - \frac{q^2}{l^2} x^2, \quad (22)$$

que és l'expressió buscada. Els eixos del sistema de coordenades obliqües són, en aquest cas, un diàmetre i la tangent que passa per un dels seus extrems.

Un cas particular i notable de l'equació trobada és aquell en què el punt des del qual es defineix el sistema de coordenades és un vèrtex. En aquest cas, $l = a$ i $q = b$. Llavors, l'equació de l'el·lipse, en funció del seu paràmetre, prendria la forma

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2. \quad (23)$$

Aquesta equació podria fer entendre que la paràbola i l'hipèrbola són casos extrems de l'el·lipse. Donats el vèrtex, el focus i el paràmetre, es podria suposar que el centre està infinitament allunyat $a \rightarrow \infty$ i l'el·lipse es transforma en una paràbola d'equació $y^2 = 2px$.

Semblantment, si en lloc de tenir el centre a un punt de coordenades $(a, 0)$, aquest estigués en un punt (més enllà de l'infinit) $(-a, 0)$, obtindriem la hipèrbola d'equació $y^2 = 2px + \frac{p}{a} x$. Des d'aquest punt de vista, la paràbola i l'hipèrbola podrien interpretar-se com el·lipses infinitament grans.

3.5 La curvatura de l'el·lipse

L'equació de l'el·lipse en coordenades obliqües, essent els eixos un diàmetre i la tangent que passa pel seu extrem —equació (22)—, resulta especialment apropiada per trobar-ne la curvatura, fent ús dels mètodes newtonians.

Analitzem la figura 9, d'aparença una mica complexa. Els elements importants que cal destacar són el punt P de l'el·lipse, que defineix la tangent PY ; el centre C ; els diàmetres conjugats PCE i RCG , que es creuen a C i un punt Q de coordenades (x, y) preses des dels eixos PCE i PY . En aquest cas es té $q = CR$ i $l = CP$, necessaris per interpretar l'equació (22) en aquesta construcció.

S'hi ha dibuixat la circumferència osculatriu, de diàmetre PD , que s'ha de determinar encara. També s'hi ha destacat l'eix major, els focus F i F' , el segment FP i la normal a la tangent FY , principalment.

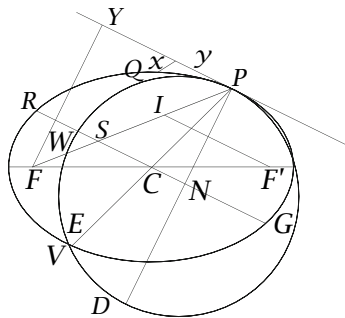


FIGURA 9: La curvatura d'una el·lipse.

La secant PV de la circumferència osculatriu en la direcció de P al centre C , segons s'ha vist a (10) es pot obtenir del límit

$$PV = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2}{x}.$$

D'acord amb l'equació (22), el límit ha d'ésser

$$PV = \frac{2q^2}{l}, \quad (24)$$

recordant que s'ha definit $q = CR$ i $l = CP$. Anomenant n a la distància entre la tangent i el diàmetre paral·lel a aquesta, $n = PN$, es compleix que

$$\frac{PD}{PV} = \frac{CP}{PN} = \frac{l}{n}$$

per semblança dels triangles rectangles PDV i PCN , d'on obtenim que

$$PD = \frac{2q^2}{n}.$$

Si diem R_c al radi de curvatura, es tindrà

$$R_c = \frac{q^2}{n}. \quad (25)$$

Si hom ho prefereix, es pot fer ús de la igualtat $qn = ab$, que es justifica més endavant i que correspon a l'àrea del rectangle delimitat pel semidiàmetre CP , pel CR i per les respectives tangents que passen per P i R , per obtenir

$$R_c = \frac{a^2 b^2}{n^3}. \quad (26)$$

Per veure que $qn = ab$, observem que els diàmetres conjugats i les quatre tangents paral·leles a aquests (2+2) divideixen la regió del pla que circumscriu l'el·lipse en quatre rectangles d'àrea igual i que per força han de valer ab , com s'evidencia en el cas en què els diàmetres conjugats coincideixen amb els eixos de la figura (eix major $2a$ i eix menor $2b$). S'ha de considerar que aquests quatre rectangles tenen els seus homòlegs en les tangents i diàmetres conjugats de la circumferència de radi a , de la qual per una transformació de les ordenades dels punts del pla, hem obtingut l'el·lipse. En afectar-se totes les ordenades de qualsevol punt del pla per un factor $\frac{b}{a}$

mantenint iguals les abscisses, l'àrea de qualsevol figura tancada es veu reduïda en el mateix factor $\frac{b}{a}$. Els quatre quadrats en la circumferència valen a^2 , d'on els quatre rectangles que s'en deriven per la transformació esmentada valdran ab .

També s'aconsegueix un resultat interessant per al radi de curvatura si s'expressa aquest en funció del paràmetre de l'el·lipse i altres magnituds relacionades amb un focus i no amb el centre de la figura. En primer lloc s'ha de mostrar que el segment CR talla el que va del focus F al punt P en un punt S tal que $SP = a$, el semieix major. Es prova aixecant des de l'altre focus F' el segment $F'I$ paral·lel a la tangent PY i al radi CR . Com que el centre C es troba just al mig dels dos focus, per Tales, el punt S també estarà al mig de F i de I ; per tant PS serà la mitjana aritmètica de PF i de PI . Però $PI = PF'$, donat que els segments que van de P als focus formen el mateix angle amb la tangent. Per tant, $PI + PF = 2a$, i $PS = a$.

Llavors, per semblança dels triangles SPN i FPY , es podrà establir que

$$\frac{n}{a} = \frac{FY}{FP}.$$

Aïllant n i substituint-la a la igualtat (26), s'arriba a expressar el radi de curvatura de la manera següent:

$$R_c = p \frac{FP^3}{FY^3}. \quad (27)$$

Observeu que $\sin(FPY) = \frac{FY}{FP}$.

A causa de la utilitat d'aquesta expressió, es farà un canvi de denominació d'algunes magnituds que hi intervenen, per aconseguir fer-les més fàcils de memoritzar. En concret, $FP = R$ en referència al radi vector posició, i $FY = N_o$ en referència a la normal a la tangent aixecada des d'un focus. D'acord amb aquesta nova terminologia

$$R_c = p \frac{R^3}{N_o^3}. \quad (28)$$

Com es pot apreciar observant l'aspecte de l'el·lipse, el mínim radi de curvatura es troba als vèrtexs i el màxim es troba en els punts situats als extrems de l'eix menor. En els vèrtexs $R = N_o$ i, en conseqüència, $R_c = p$. El màxim valor s'aconsegueix quan $R = a$ i $N_o = b$, amb lo que $R_c = \frac{a^2}{b}$, un valor francament simètric al paràmetre $p = \frac{b^2}{a}$.

4 Forces a trajectòries el·líptiques

Ja que es disposa de la curvatura de les el·lipses, el més fàcil serà emprar el mètode expressat a (11) per obtenir acceleracions. S'obtidran dos casos: a) quan la força centrípeta es dirigeix al centre de l'el·lipse, i b) quan es dirigeix a un dels focus.

4.1 Forces al centre de l'el·lipse

Com que es complirà la llei de les àrees respecte a un punt interior de la figura, la velocitat areolar serà constant i igual a l'àrea de l'el·lipse dividida pel període de revolució. És a dir,

$$\dot{\Omega} = \pi \frac{ab}{T}.$$

La velocitat en cada punt de la trajectòria serà, com s'ha vist anteriorment a (12),

$$V_P = \frac{2\dot{\Omega}}{n}.$$

L'acceleració centrípeta val sempre —vegeu (11)—.

$$g = \frac{V_P^2}{\frac{1}{2}PV},$$

on PV és la corda de la circumferència osculadora en la direcció de la força, en aquest cas en direcció al centre.

Com es mostra a la secció precedent,

$$\frac{1}{2}PV = \frac{q^2}{l}.$$

Eliminant q a través de la igualtat $qn = ab$,

$$\frac{1}{2}PV = \frac{a^2b^2}{n^2l},$$

d'on obtenim per l'acceleració centrípeta

$$g = \frac{V_P^2 n^2}{a^2 b^2} l.$$

Substituint $V_P n = 2\dot{\Omega}$ i essent la constant $\dot{\Omega} = \frac{\pi ab}{T}$, amb T el període de revolució,

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l. \quad (29)$$

Per apreciar millor el resultat, l és la distància del mòbil al centre de l'el·lipse, que ara és el centre on es dirigeix la força al llarg de tota la trajectòria. Podria semblar que l'acceleració centrípeta cap al centre de l'el·lipse és igual que en el moviment circular $\omega^2 l$, considerant ω la velocitat angular, però s'ha d'assenyalar que aquesta velocitat angular no és constant en l'el·lipse, mentre que sí que ho és en el moviment circular. Ara bé, $\frac{2\pi}{T}$ és la velocitat angular mitjana prenent el temps igual al període de revolució completa. Aquest sí que és constant d'acord amb la llei de les àrees.

El resultat mostra que l'acceleració és directament proporcional a la distància al centre de la trajectòria. Aquesta condició la satisfà una força elàstica que al centre val zero i augmenta d'intensitat proporcionalment a la distància, $F = kR$ amb k constant. També, per l'anomenada *segona llei del moviment*, podem escriure $F = mg$, on m representa la massa del mòbil. D'aquí se segueix una relació dinàmica entre la força, la trajectòria i el moviment, i es compleix que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En conclusió, per un cos donat el període de revolució en un camp elàstic és constant. No depèn de la trajectòria el·líptica que prengui, perquè es pot mesurar sense intervenció de cap magnitud geomètrica relacionada amb la trajectòria concreta del mòbil.

4.2 Forces a un dels focus de l'el·lipse

En el cas que la força estigui dirigida a un focus, la velocitat areolar serà la mateixa que en l'exemple anterior, encara que no la velocitat lineal. També la curvatura serà formalment igual que en el cas anterior. L'única diferència provindrà del fet que per trobar l'acceleració dirigida al focus ens farà falta una secant a la circumferència osculatriu des del punt P , on es trobi el cos, dirigida cap al focus F , que serà igual a PW (vegeu figura 9).

D'acord amb les red denominacions $FP = R$ i $FY = N_o$, del fet que els triangles rectangles PWD i PFY siguin semblants podem extreure que

$$\frac{PW}{PD} = \frac{N_o}{R}.$$

Recordant (28), el radi de curvatura $R_c = \frac{1}{2}PD$ i

$$R_c = p \frac{R^3}{N_o^3},$$

d'on obtenim

$$\frac{1}{2}PW = p \frac{R^2}{N_o^2}. \quad (30)$$

L'acceleració centrípeta, dirigida en aquest cas al focus, serà

$$g = \frac{V_p^2}{\frac{1}{2}PW}$$

que, fent les substitucions convenientes, resulta

$$g = \frac{V_p^2 N_o^2}{p} \cdot \frac{1}{R^2}. \quad (31)$$

La part dreta de la igualtat està composta pel producte de dues fraccions, la primera és constant, ja que $V_p N_o = 2\dot{\Omega}$, i la segona és variable. Ja és suficient per posar de relleu que la força centrada al focus ha de ser inversament proporcional al quadrat de la distància. Però, com que $\dot{\Omega} = \frac{\pi ab}{T}$, substituint i fent les oportunes simplificacions obtindrem el valor de l'acceleració per la igualtat

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{R^2}. \quad (32)$$

Cal destacar que en el resultat anterior apareix la constant $\frac{a^3}{T^2}$, que pel cas del moviment dels planetes representa la llei harmònica, intuïda per Copèrnic i quantificada empíricament per Kepler. El quocient anterior representa una constant del sistema solar. Galileu, observant el moviment de les llunes de Júpiter, va aconseguir establir la constància d'un tal quocient en aquest petit sistema. Les dues constants, no obstant això eren diferents entre si.

En síntesi, de l'observació del moviment d'un sol planeta s'obté que aquest es troba accelerat cap al Sol amb una acceleració que és inversament proporcional al quadrat de la distància que separa els dos astres. Però la llei harmònica permet

estendre aquest resultat a tot el sistema solar. Així, l'acceleració causada pel Sol és independent de les característiques físiques dels planetes, com la massa, per exemple, i és inversament proporcional al quadrat de la distància al Sol.

Suposant que l'acceleració dels cossos cap al Sol és de la mateixa naturalesa que l'acceleració de caiguda dels greus, podem considerar que ha de ser independent de la massa del mòbil, tal com van demostrar amb pèndols primer Galileu i després Newton. Això implica que l'acceleració de qualsevol mòbil atret pel Sol ha de ser de la forma

$$g = \frac{k}{R^2}$$

i, en conseqüència, si acabés en una trajectòria el·líptica, el seu semieix major i el seu període de revolució estarien lligats per la relació

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{k}.$$

4.2.1 Paper de les masses en l'atracció solar. Si admetem que està provat que l'acceleració centrípeta dirigida al Sol és independent de la massa, per la segona llei, el quocient entre la força d'atracció cap al Sol i la massa $\frac{F}{m}$ també serà independent de la massa, la qual cosa implica que la força d'atracció dels planetes cap al Sol ha de ser directament proporcional a la massa dels planetes.

Newton disposava d'evidències astronòmiques que afavorien la hipòtesi que tots els cossos tenien un comportament dual, pel que feia a les forces d'atracció de naturalesa semblant al pes (magnètiques, etc). Participen com a cossos *atrets* i com a *atractors*. El moviment de la Lluna indicava que el pes s'estenia més enllà de l'atmosfera. Les llunes de Júpiter giraven en circumferències centrades en aquest planeta i, per si fos poc, els radis de les seves trajectòries eren proporcionals a la potència $\frac{2}{3}$ dels seus períodes de revolució.

D'altra banda, Newton havia estudiat els intercanvis de *quantitat de moviment* produïts en els xocs de dos pèndols juxtaposats. Sempre les pèrdues d'un mòbil eren idèntiques a les guanyades per l'altre, d'on es desprenia que les forces d'interacció entre aquests havien de ser de la mateixa intensitat i direcció, però de sentits oposats. Per formular la tercera llei del moviment Newton va buscar evidències empíriques. Però també coherència amb les altres dues. Proposava raonar de la manera següent. Imaginem la Terra composta per dues parts qualssevol desiguals, per exemple separades per

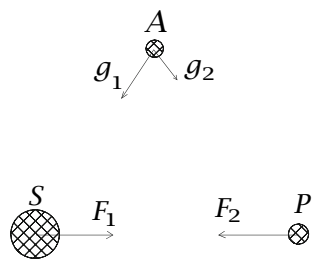


FIGURA 10: Atracció simultània del cos A vers els cossos S i P.

un pla imaginari. Cada una sentirà un *pes* cap a l'altra. El pla estarà comprimit per aquests pesos. Si aquests no fossin iguals i de sentit oposat la seva suma no seria nul·la. Llavors la Terra considerada com un tot s'autoaplicaria una força resultant, contràriament al que afirma la primera llei (tot cos persevera en el seu estat de moviment si un segon cos no li aplica cap força). El mateix raonament podria aplicar-se al sistema solar. La suma de les seves interaccions ha de ser zero. Altrament, considerat com un sistema, violaria la llei d'inèrcia.

Per mostrar el paper de la massa del Sol en l'atracció dels planetes, podem imaginar un triangle equilàter. En un vèrtex suposarem el Sol S ; en un altre, un planeta P ; i en el tercer, un mòbil qualsevol A , tal com es representa a la figura adjunta (proposició 69 i teorema 29 dels *Principia*).

El cos A estarà accelerat cap a S amb una acceleració g_1 , que serà la mateixa que experimentarà P , ja que es troba a la mateixa distància de S que A . Semblantment, el mateix A estarà accelerat cap a P amb una acceleració g_2 cap a P , que serà igual a la que S tindrà cap a P , perquè està a la mateixa distància de P que el cos A . Ara bé, les forces F_1 i F_2 seran iguals en intensitat, i $F_1 = m_s g_2$, mentre que $F_2 = m_p g_1$, d'on es dedueix

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{m_s}{m_p}.$$

En conclusió, el cos A , que té una acceleració vers S proporcional a la força d'atracció cap a S , i similarment envers P , sentirà atraccions cap a S i cap a P tals que

$$\frac{F_{A-S}}{F_{A-P}} = \frac{m_s}{m_p}. \quad (33)$$

Generalitzant els diferents resultats, dos cossos qualssevol, de masses m_1 i m_2 , separats una distància R , s'atreuen entre si amb forces d'igual intensitat de valor

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad (34)$$

essent G una constant de proporcionalitat.

Aplicant aquesta formulació a allò vist per a les trajectòries el·líptiques, si m_1 és prou important respecte a m_2 com per considerar-la fixa al focus de la trajectòria de m_2 , que descriu una el·lipse de semieix a i període T , haurà de satisfer

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G m_1}{4\pi^2}. \quad (35)$$

4.3 Trajectòries en camps gravitatoris centrípets

Per acabar, resoldrem el «problema IX» dels *Principia* de manera equivalent a com ho va fer Newton.

Suposant donada una força del tipus de la que desplega el Sol a l'espai veí, les acceleracions seran inversament proporcionals al quadrat de la distància al centre de l'astre i independents de la massa dels mòbils petits atrets cap aquest centre. Coneixent la posició i la velocitat V_p en un instant donat, inclosa la direcció, d'un mòbil es demana determinar la seva trajectòria.

Atès que les el·lipses són solucions possibles, es tracta de veure si amb les condicions inicials és possible determinar una el·lipse concreta. Donem per suposat que coneixem un punt de la corba P , la seva tangent (la direcció de la velocitat), un focus F (el

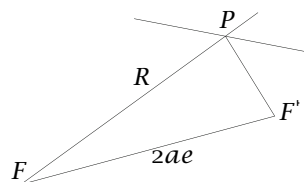


FIGURA 11: Donats F, P, p i la tangent trobar F' .

punt on es dirigeixen les forces), la normal N a la tangent aixecada des del focus i la distància del focus al punt, a la qual anomenarem R .

Podem deduir de la llei de les acceleracions centrípetes (11) la curvatura de la corba en el punt P . En concret, la meitat de la corda de la circumferència osculatriu en la direcció del focus satisfarà la condició

$$\frac{1}{2}PW = \frac{V_P^2}{g},$$

essent

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

on G és la constant de gravitació universal i M la massa del Sol, o qualsevol altre causant del camp gravitatori.

La curvatura està completament determinada per les condicions inicials i la llei de la força

$$\frac{1}{2}PW = \frac{V_P^2 R^2}{GM}. \quad (36)$$

Coneixent la corda PW i les condicions inicials, això equival a disposar del paràmetre de l'el·lipse. Com s'ha vist anteriorment, $PW = 2p \frac{R^2}{N^2}$. Per tant, podem considerar conegut p .

Tal com es mostra a la figura 11, per construir el segon focus F' a partir de les condicions inicials s'ha de construir el triangle FPF' , tenint en consideració que F i P són donats i que F' s'ha de trobar al llarg d'una recta que forma el mateix angle amb la tangent que el segment FP . Per altra banda, el segment FF' està condicionat a valer $2ea$, essent e l'excentricitat i a el semieix major. També s'ha de satisfer la propietat dels focus $FP + PF' = 2a$. Pel teorema del cosinus podem lligar aquestes relacions, establint

$$4e^2 a^2 = R^2 + (2a - R)^2 + 2R(2a - R) \cos(2\alpha).$$

S'ha fet ús del fet que el suplementari de l'angle FPF' és 2α . D'aquí es pot aïllar a , cosa que ja determina completament la posició del segon focus i l'el·lipse:

$$a = \frac{R^2}{2R - \frac{1}{2}PW}. \quad (37)$$

L'excentricitat es pot obtenir de la igualtat $e^2 = 1 - \frac{p}{a}$. L'equació de l'el·lipse en polars mostra a la clara que coneguts p , e i un punt de la corba aquesta queda completament determinada.

L'expressió racional anterior que ens permet trobar a té una diferència en el denominador. Si fos nul·la vindria a dir que a seria infinita. Ens trobaríem en el cas d'una *paràbola*, quan $PW = 4R$. Si $PW > 4R$, llavors a seria negatiu i l'excentricitat superior a la unitat, com correspon al cas de la *hipèrbola*. El cas de la circumferència correspon a $PW = 2R$ juntament amb la condició addicional que la tangent sigui perpendicular al segment FP .

Referències

- [1] BOYER, C. B. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, 1986. [Traducció de Mariano Martínez Pérez].
- [2] GALILEI, G. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Editora Nacional, 1981. [Edició de C. Solís i J. Sadaba]
- [3] NEWTON, I. *Principios matemáticos de filosofía natural*. Editora Nacional, 1982. [Edició d'Antonio Escotado].

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES
I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA
Josep.Casade11a@uab.es